DESCRIPTORES DE SEÑALES CAÓTICAS

Ma. Carmen Lule-Carpinteyro, Pedro C. Estrada Gutiérrez y Hugo G. González Hernández
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un programa especializado para la descripción de la caoticidad tanto de un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias como para una serie de tiempo. Uno de los problemas en el estudio de caos es la falta de herramientas accesibles para describir en forma *analítica* las características del sistema caótico. A estas herramientas las hemos llamado descriptores de la señal caótica. Los descriptores que se presentan en este trabajo son fundamentalmente dos: Exponentes de Lyapunov y Dimensión Fractal, ambos implementados para los casos mencionados al principio de este resumen. Se presentan diferentes ejemplos y se comparan contra mapas de bifurcaciones obtenidos en nuestro laboratorio. Para series de tiempo se presentan estos descriptores aplicados a diferentes tipos de ruido.

ABSTRACT

This paper shows a specialized program for chaotic level description of dynamic systems and time series. A problem with chaos study is the lack of flexible tools to describe analytically the chaotic system properties. These tools have been called Chaotic Signal Descriptors. Descriptors presented in this paper are: Lyapunov exponents and Fractal dimension, both able to apply upon dynamic systems and time series. Several examples are presented and compared with bifurcation maps obtained in our laboratory. For time series, descriptors are applied upon several kinds of noise.

INTRODUCCIÓN

Una evidencia convincente para detectar y cuantificar el caos determinístico en sistemas no lineales puede encontrarse al emplear diferentes herramientas. Nosotros nos hemos enfocado principalmente en dos de ellas: el espectro de los exponentes de Lyapunov y en la dimensión del sistema, para lo cual nos hemos basado en programas existentes en nuestro laboratorio. Se abarcan tanto sistemas discretos no lineales, como series de tiempo, cuyos problemas serán tratados a lo largo del artículo.

EXPONENTES DE LYAPUNOV

Los exponentes de Lyapunov son el promedio de rangos exponenciales de divergencia o convergencia de las órbitas adyacentes en el espacio de fase[1]. Estas órbitas adyacentes corresponden a estados cercanos idénticos, cuando órbitas exponenciales divergen significa que el sistema pierde rápidamente su habilidad o propiedad de predicción (Figura 1).

Un sistema dinámico disipativo con al menos un exponente negativo, hará que la suma sea negativa, indicando que el movimiento post-transitorio de trayectorias ocurrirá sobre un volumen cero del conjunto límite, así mismo un sistema con al menos un exponente de Lyapunov positivo es considerado como caótico[2], siendo la magnitud del exponente la que refleja la escala de tiempo en la que el sistema dinámico empieza a ser impredecible.

Para sistemas en los cuales se conocen sus ecuaciones de movimiento es posible calcular todo el espectro de los exponentes de

[1] *Es decir, que la suma de los exponentes es el tiempo promedio de divergencia de la velocidad en el espacio de fase.*

[2] *Pues el exponente positivo refleja una "dirección" en la cual el sistema experimenta un proceso repetitivo de contracción y desdoblamiento que decorrelacionan estados adyacentes en el atractor.*

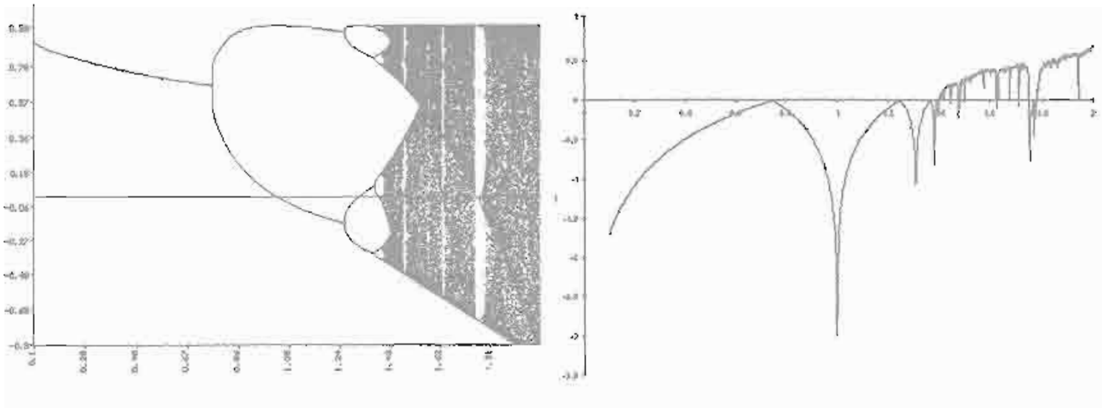

Figura 1. Mapa de bifurcación y Espectro de Lyapunov

Lyapunov, no siendo así para datos experimentales pues contienen ruido externo que provoca fluctuaciones y limitan la resolución experimental. Sabemos que estos datos experimentales son observaciones derivadas del sistema. Existen técnicas de reconstrucción del espacio de fase con coordenadas retrasadas que hacen posible obtener mediante una serie de tiempo un atractor cuyo espectro de Lyapunov es idéntico al del atractor original. El exponente de Lyapunov se puede definir de la siguiente forma:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left|f'(x(i))\right| \qquad (1)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov y $f'(x(i))$ es la derivada de la trayectoria para el i-ésimo punto. La estimación de los exponentes de Lyapunov para una serie de datos experimentales es un poco diferente a la determinación de éstos a partir del modelo matemático. Consideremos el caso más simple: la determinación del exponente más grande. Comenzamos escogiendo una "trayectoria auxiliar" y una "trayectoria de prueba". Se desea evaluar la razón local de divergencia entre las dos trayectorias promediadas a lo largo del atractor. Se escogen dos puntos iniciales lo más cercano posible uno del otro, pero cuya separación temporal en la serie de tiempo es no menor que un período promedio de la órbita.

Cuando se trabaja con series de tiempo el número de datos experimentales es limitado y algunas veces se pueden tener errores, principalmente por que la distancia mínima disponible es demasiado larga. Para cualquier clase de atractor dado, la claridad depende de la calidad y la cantidad de los datos experimentales.

DIMENSIÓN

La dimensión es utilizada para poder caracterizar las propiedades de un atractor. Generalmente, la dimensión puede ser definida como la información necesaria para especificar la posición de un punto sobre el atractor dentro de los límites de una ocurrencia dada, o también como el nivel más bajo del número de variables esenciales necesarias para modelar la dinámica del sistema. Para atractores simples, definir y determinar la dimensión es fácil, por ejemplo, usando cualquier definición razonable de dimensión, un tiempo de equilibrio independiente estacionario (punto fijo) tiene dimensión cero; una oscilación periódica estable (ciclo límite) tiene dimensión uno y un atractor de doble periodo (toroide) tiene dimensión dos. Esto es, porque su estructura es muy regular de tal manera que la dimensión de estos atractores tienen valores enteros.

Los atractores caóticos, sin embargo, la mayor parte de las veces tienen una estructura no tan simple (frecuentemente tiene estructura múltiple), por lo que su dimensión tiene valores no enteros. Para entender las propiedades de un atractor caótico, se debe tomar en cuenta no solo el atractor en sí mismo, sino también la "densidad" de los puntos sobre el atractor.

Como en el caso de los exponentes de Lyapunov, el cálculo analítico de la dimensión fractal se restringe a un número pequeño de casos. La dimensión fractal es definida a continuación. Sea S un conjunto de puntos en un espacio euclidiano. Considere ciertos hipercubos de lado ε y calcule el número mínimo de tales celdas N(ε) necesarias para cubrir S. Es decir:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} \qquad (2)$$

no puede ser calculada en una forma sencilla y no se garantiza la convergencia del límite. Grassberger y Procaccia (1983) sugieren una aproximación diferente. La idea básica es la de reemplazar el clásico algoritmo de conteo de cajas con la medida de las distancias entre puntos que representen posiciones del sistema a lo largo de una órbita del atractor. Suponga que se empieza a partir del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \Re^n$$

Por integración numérica obtenemos una trayectoria que consiste en N puntos discretos $\{x_i\}_{i=1}^{N} \equiv \{x(t+i\tau)\}_{i=1}^{N}$, donde τ es un intervalo de tiempo arbitrariamente fijo, y los puntos iniciales han sido seleccionados para descartar los transitorios. Definimos la función de correlación

$$C(r) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} U(r - |x_i - x_j|) \qquad (3)$$

para i≠j, donde U es la función de Heavyside o escalón unitario. Para r´s pequeñas, C(r) se comporta como una potencia de r. Entonces, (3) se puede escribir como:

$$C(r) \approx r^{D_c} \qquad (4)$$

donde D_c se llama la dimensión de correlación. En estimados numéricos, en donde el número de puntos es ilimitado y la precisión es finita, para r demasiado pequeñas las estadísticas estimadas son pobres, ya que el número de observaciones es pequeño y los errores pueden ser grandes.

Para sistemas experimentales, sin embargo, cuando se dispone en la serie de tiempo de una sola o pocas variables, la situación es más difícil. En la práctica primero que nada se supone la dimensión del atractor del sistema que ha generado los datos experimentales. Entonces uno trata de acomodar la serie de tiempo en esa dimensión y trata de reconstruir ese atractor y estimar su dimensión de correlación. Este proceso es iterativo para dimensiones mayores. En un principio, mientras la dimensión supuesta del atractor D_s es menor que la del atractor real D_r, D_s continuará aumentando. Si el sistema es determinista, D_s converge a D_r. En el caso opuesto de que el sistema sea puramente aleatorio D_c tenderá a infinito.

CONCLUSIONES

En general es complicado analizar sistemas caóticos. Se complica más cuando se tiene un sistema experimental, esto es, una serie de datos de los cuales se quiere averiguar su caoticidad ya sea para controlarlo, aprovecharlo o simplemente analizarlo. Este trabajo considera dos medidas de la caoticidad de un sistema en general, ya sea en forma de serie de tiempo o en forma de ecuación dinámica. En nuestro laboratorio se tienen los programas que obtienen estos dos descriptores. Se están desarrollando programas para obtener otros descriptores.

REFERENCIAS

1. Parker, T. S., Chua, L. O. Chaos: A Tutorial For Engineers. *Proceedings of the IEEE*. 1987.

2. Medio, A., Gallo, G. *Chaotics Dynamics. Theory And Applications To Economics*. Cambridge University Press. 1992

3. Wolf, A., Swift, J., Swinney, B., Vastano, H. L. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D*, 1985:285-317.

4. Farmer, J. D., Edward, O., Yorke, J. A. The Dimension Of Chaotic Attractors. *Physica 7D*, 1983:153-180.