



RECONSTRUCCIÓN DEL ATRACTOR DE CHUA A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES

Hugo G. González-Hernández y Marcos Montiel-Castellanos
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle
e-mail: labciulsa@ci.ulsal.mx

RESUMEN

El circuito desarrollado por el Dr. Leon O. Chua (1-4) es un circuito electrónico no lineal que contiene una resistencia seccionalmente lineal. El comportamiento dinámico de este circuito ha sido ampliamente estudiado y ha presentado caos en simulaciones en computadora, en experimentos de laboratorio y en análisis matemático. Aunque éste es un sistema en tiempo continuo, a menudo es necesario derivar modelos discretos, algunas razones para ello son: las mediciones se realizan a intervalos discretos de tiempo, el procesamiento y control digital es cada vez más común y las simulaciones pueden realizarse en forma sencilla y rápida. Existen algunas técnicas desarrolladas para el análisis de mediciones de sistemas caóticos. Particularmente, la reconstrucción de un atractor a partir de mediciones escalares no resulta evidente. En este trabajo se presenta la reconstrucción de los distintos atractores que genera la evolución en tiempo de este circuito a partir de datos experimentales utilizando el cálculo de Falsos Vecinos Cercanos (FVC), la Dimensión Global de Empotramiento (DGE) y el Promedio de Información Mutua (PIM) de la serie de tiempo. Se presenta también una comparación entre los atractores reales y los atractores reconstruidos.

ABSTRACT

Professor Chua's circuit is a nonlinear electronic circuit with a piecewise linear resistor. The dynamical behavior of this system has been widely studied and it has been shown to be chaotic by computer simulation, laboratory experiments and mathematical analysis. Although this is a time-continuous system, it is often desirable to derive discrete models, some reasons are: that measurements are carried out at specific time intervals, digital processing and control is becoming common, and digital simulations can be performed quick and easily. There are some special techniques developed for the analysis of observed chaotic data. Particularly, it is not obvious to take scalar data of a system and trying to reconstruct an attractor. In this paper we show how to reconstruct attractors of Chua's circuit from time series using the computation of the False Nearest Neighbors (FNN), Global Embedding Dimension (GED) and the Average Mutual Information (AMI). A comparison between the reconstructed attractors and the real attractors is shown.

INTRODUCCIÓN

El circuito de Chua (Figura 1) es un circuito electrónico no lineal autónomo que puede presentar una gran cantidad de bifurcaciones y atractores (1). Este circuito está constituido de cuatro elementos lineales (dos capacitores, un inductor y una resistencia) y una resistencia no lineal (seccionalmente lineal) N_R , conocida como diodo de Chua.

Esta resistencia no lineal puede ser construida usando componentes electrónicos de fácil disposición (2, 3), y posee una característica

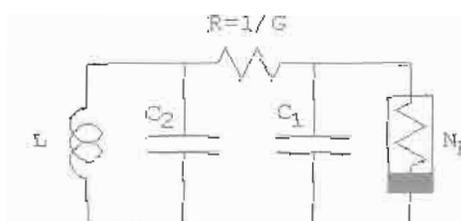


Figura 1. Circuito de Chua.

de voltaje vs. corriente ($v-i$) seccionalmente lineal en tres partes como se muestra en la Figura 2. La región entre los puntos de ruptura tiene una pendiente G_a , y la región fuera de los puntos de ruptura tiene una pendiente G_b . Para nuestro caso, ambas tendrán pendiente negativa.

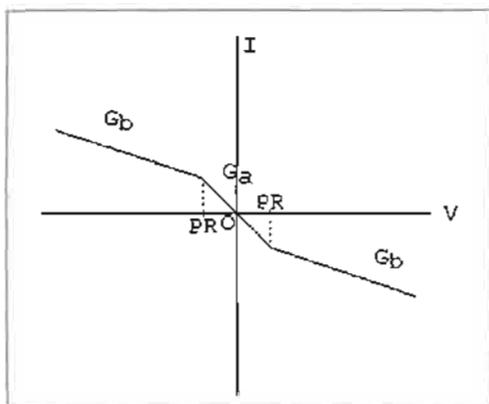


Figura 2. Característica $v-i$ del diodo de Chua.

Las ecuaciones de estado del circuito son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - f(v_1)] \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L} [v_2] \end{aligned} \quad [1]$$

$$f(v_1) = \begin{cases} G_b v_1 - (G_a - G_b) PR \\ G_a v_1 \\ G_b v_1 + (G_a - G_b) PR \end{cases}$$

Utilizando un capacitor de 5.6nF como C_1 , un capacitor de 56nF como C_2 , un inductor de 10mH con una resistencia interna de 9Ω como L , y una resistencia no lineal con pendientes $G_b = -409.09\mu S$ y $G_a = -757.57\mu S$ y un punto de ruptura de 1V, además de una resistencia variable de $2K\Omega$, se pueden encontrar una gran variedad de comportamientos conforme se va disminuyendo el valor de la resistencia variable.

Los comportamientos dinámicos de este circuito han sido reportados ampliamente (1).

RECONSTRUCCIÓN

En este trabajo se presentan reconstrucciones de cuatro tipos de comportamientos de este circuito: Un comportamiento de punto fijo, un comportamiento periódico, y dos tipos de comportamientos caóticos.

El voltaje a través del capacitor C_1 fue capturado por medio de una tarjeta de adquisición de datos empotrada en una PC con lo que se obtuvieron los datos experimentales para la variable v_1 .

Es bien conocido (5, 6) que la reconstrucción se puede llevar a cabo utilizando versiones de retrasos en tiempo de la cantidad escalar observada $x(n) = x(t_0 + n\Delta t)$, ($n=1,2,\dots$) para un tiempo inicial t_0 e intervalo en tiempo Δt , como coordenadas del espacio de estado reconstruido. Se utilizan vectores multivariables $y(n)$ en un espacio de estado d -dimensional obtenidos a partir del conjunto de observaciones:

$$y(n) = [x(n), x(n+T), \dots, x(n+(d-1)T)] \quad [2]$$

para trazar la órbita del sistema. El problema es determinar T y la dimensión de empotramiento $d = d_E$.

Determinación del período de retraso T : Promedio de Información Mutua (PIM)

La determinación de T se basa en un concepto fundamental de caos: la generación de información. El concepto de promedio de información mutua está basado en la idea de Shannon de información: consideremos dos mediciones a_i y b_j de conjuntos A y B de posibles mediciones. La información mutua entre estas dos mediciones es la cantidad "aprendida" por la medición a_i de la medición b_j . En bits, esto es,

$$\log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad [3]$$

donde $P_{AB}(a,b)$ es la densidad de probabilidad conjunta para las mediciones en A y de B. $P_A(a)$ y $P_B(b)$ son densidades de probabilidad individuales para mediciones en A y en B. El promedio de esta información estadística se le conoce como Promedio de Información Mutua entre mediciones A y mediciones B y puede ser escrita como:

$$I_{AB} = \sum_{a,b} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad [4]$$

Se toman los valores de $x(n)$ como el conjunto de mediciones A y los valores de $x(n+T)$ como el conjunto de mediciones B. Entonces el PIM entre estas dos mediciones es:

$$PIM(T) = \sum_{x(n), x(n+T)} P(x(n), x(n+T)) \log_2 \left[\frac{P(x(n), x(n+T))}{P(x(n))P(x(n+T))} \right] \quad [5]$$

En (5) se sugiere una prescripción para determinar si los valores de $x(n)$ y $x(n+T)$ son suficientemente independientes para poderlos utilizar para construir el vector $y(n)$. Esta prescripción es tomar el valor de T donde ocurra el primer mínimo de $PIM(T)$.

Determinación de la Dimensión Global de Empotramiento d_E : Falsos Vecinos Cercanos (FVC)

La dimensión global de empotramiento es la dimensión en la que se puede empotrar la órbita de la solución que forma el atractor. Para determinarla será necesario averiguar en qué dimensión se puede "desdoblar" por completo el atractor. Por ejemplo, si se proyecta un objeto tridimensional en un espacio de dos dimensiones, puntos que aparecen cercanos realmente están lejos. A esto nos referimos con Falsos Vecinos Cercanos.

En un espacio d -dimensional, denotando el r -ésimo vecino más cercano de $y(n)$ como $y_r(n)$, el cuadrado de la distancia euclidiana entre $y(n)$ y su vecino más cercano está dada por

$$R_d^2(n,r) = \sum_{k=0}^{d-1} [x(n+kT) - x_r(n+kT)]^2 \quad [6]$$

En dimensión $d+1$ agregamos una $(d+1)$ -ésima coordenada a cada vector $y(n)$ es decir agregamos $x(n+dT)$. Ahora obtenemos el cuadrado de la distancia euclidiana entre $y(n)$ y $y_r(n)$ en esta dimensión:

$$R_{d+1}^2(n,r) = R_d^2(n,r) + [x(n+dT) - x_r(n+dT)]^2 \quad [7]$$

Necesitamos un criterio para encontrar falsos vecinos; naturalmente podemos decir que si el incremento en distancia entre $y(n)$ y $y_r(n)$ aumenta al ir de la dimensión d a la dimensión $d+1$ aumenta, entonces tenemos un falso vecino. El incremento de distancia se puede expresar como

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(n,r) - R_d^2(n,r)}{R_d^2(n,r)}} = \frac{|x(n+dT) - x_r(n+dT)|}{R_d(n,r)} > R_{TH} \quad [8]$$

donde R_{TH} es un umbral que se determina experimentalmente, para nuestro caso se seleccionó $R_{TH}=15$.

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se obtuvieron series de tiempo para la caída de voltaje a través del capacitor C_1 . Los datos fueron muestreados cada 0.001 segundos, y se utilizaron solamente las primeras 10,000 muestras para cada reconstrucción.

A continuación se presentan los resultados del PIM, la DGE utilizando el porcentaje de FVC y finalmente las reconstrucciones utilizando T como el primer mínimo del PIM para los distintos tipos de atractores desarrollados por el circuito de Chua.

Todos los experimentos realizados presentaron una dimensión global de empotramiento de $d_E=3$.

Primer Caso:

Cuando el valor de la resistencia R es de $1.975K\Omega$ ($G=0.506$ ms), se presenta un atractor de punto fijo.

En la Figura 3 se muestra una proyección bidimensional (v_1-v_2) del atractor tipo punto fijo del circuito en un osciloscopio.

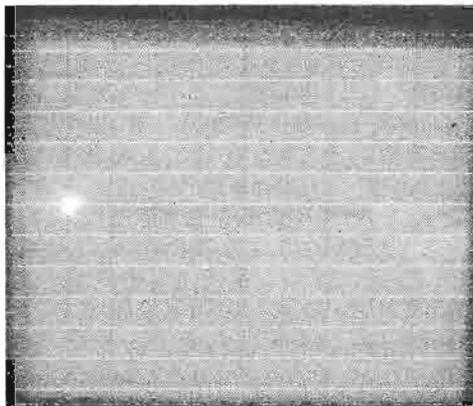


Figura 3. Proyección (v_1-v_2) del atractor para $G=0.506$ ms. Eje h. 1 V/div., Eje v. 0.5 V/div.

Utilizando el primer mínimo del PIM [5] mostrado en la Figura 4, se selecciona un intervalo de tiempo $T=6\tau$ para la reconstrucción del atractor (Figura 5).

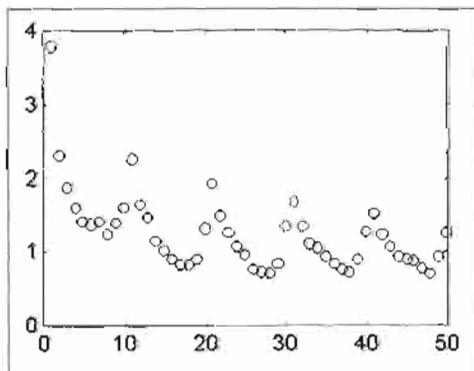


Figura 4. Promedio de Información Mutua para $G=0.506$ ms.

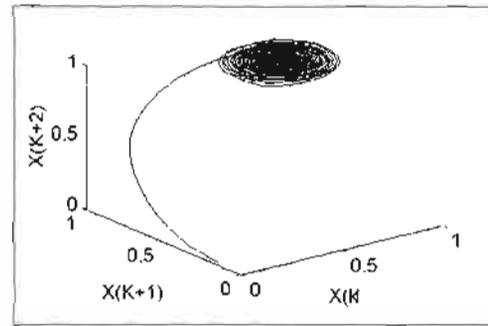


Figura 5. Reconstrucción del atractor para $G=0.506$ ms.

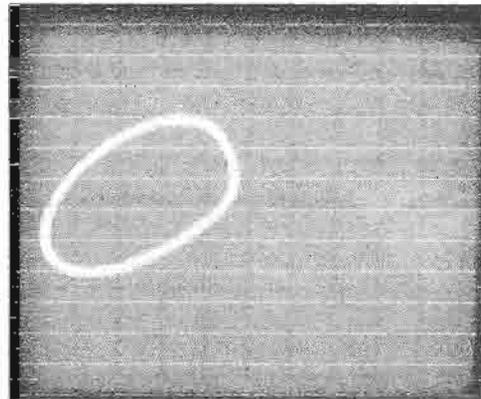


Figura 6. Proyección (v_1-v_2) del atractor para $G=0.519$ ms. Eje h. 1 V/div., Eje v. 0.5 V/div.

Segundo Caso:

Si el valor de la resistencia R es disminuido hasta $1.925 K\Omega$ ($G=0.519$ ms) se presenta un atractor de tipo periódico.

En la Figura 6 se muestra una proyección bidimensional (v_1-v_2) del atractor tipo periódico del circuito en un osciloscopio.

Se utiliza el primer mínimo del PIM (Figura 7), seleccionándose así un intervalo de tiempo $T=9\tau$ para realizar la reconstrucción del atractor mostrado en la Figura 8 (En esta gráfica se descartaron los primeros 500 datos para eliminar los transitorios).

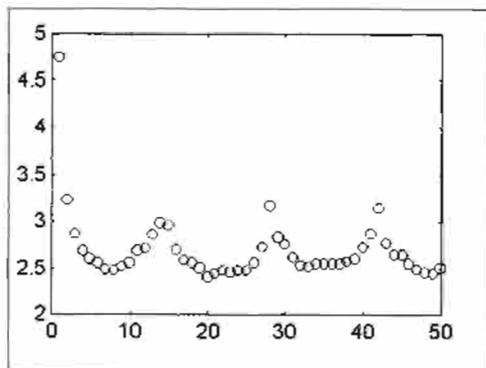


Figura 7. Promedio de Información Mutua para $G = 0.519$ ms.



Figura 8. Proyección (v_1-v_2) del atractor para $G=0.539$ ms. Eje h. 1 V/div., Eje v. 0.5 V/div.

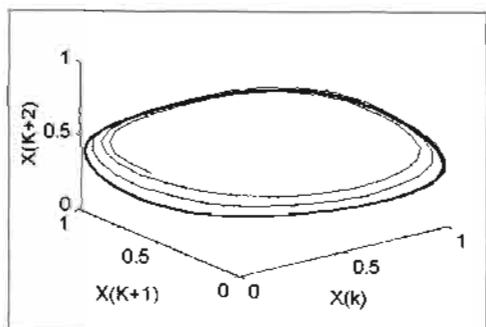


Figura 9. Reconstrucción del atractor para $G=0.519$ ms.

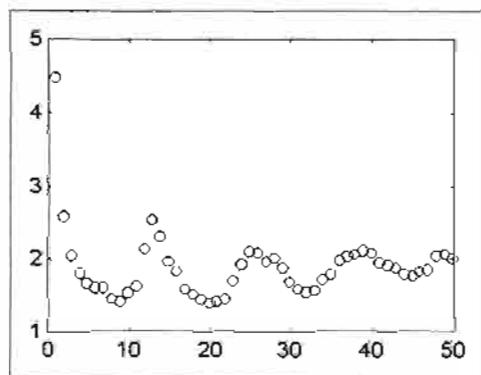


Figura 10. Promedio de Información Mutua para $G=0.539$ ms.

Tercer Caso:

Al continuar disminuyendo el valor de la resistencia R hasta $1.855 \text{ K}\Omega$ ($G=0.539$ ms) se presenta un atractor de tipo caótico. En la Figura 9 se muestra una proyección bidimensional (v_1-v_2) del atractor tipo caótico del circuito en un osciloscopio.

Con el Promedio de Información Mutua de la Figura 10 se selecciona el intervalo de tiempo $T=9\tau$ para poder realizar la reconstrucción del atractor de la Figura 11.

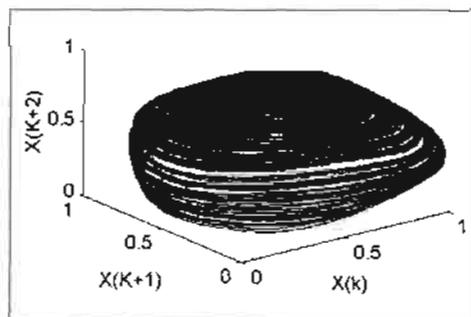


Figura 11. Reconstrucción del atractor para $G=0.539$ ms.

Cuarto Caso:

Al continuar disminuyendo el valor de la resistencia R hasta $1.820\text{ K}\Omega$ ($G=0.549\text{ ms}$) se presenta otro atractor de tipo caótico.

En la Figura 12 se muestra una proyección bidimensional (v_1-v_2) del atractor tipo caótico del circuito en un osciloscopio.

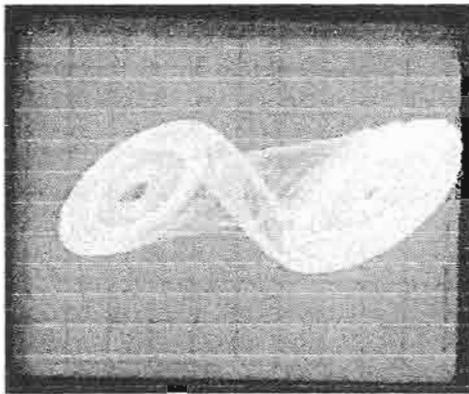


Figura 12. Proyección (v_1-v_2) del atractor para $G=0.549\text{ ms}$. Eje h. 1 V/div., Eje v. 0.5 V/div.

En la Figura 13 se muestra el Promedio de Información Mutua. Aprovechando esta gráfica se localiza el primer mínimo para poder seleccionar un intervalo de tiempo $T=7\tau$, para la reconstrucción del atractor que se muestra en la Figura 14.

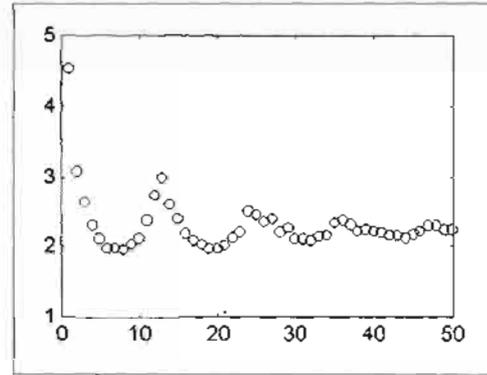


Figura 13. Promedio de Información Mutua para $G=0.549\text{ ms}$.

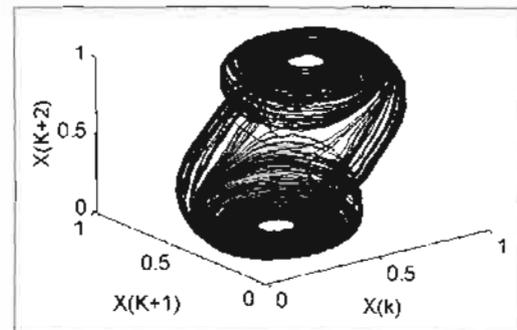


Figura 14. Reconstrucción del atractor para $G=0.549\text{ ms}$.

reconstruir el comportamiento dinámico multidimensional.

CONCLUSIONES

Se han mostrado reconstrucciones para los distintos atractores que puede presentar el circuito de Chua. Como se puede apreciar en la sección anterior, solamente se necesita una serie de tiempo para reconstruir el atractor. Este resultado no es nuevo; sin embargo, la utilización del PIM y de los FVG para determinar la dimensión de empotramiento y el periodo de tiempo $T\tau$, constituyen una herramienta para la reconstrucción. Una ventaja de este tipo de técnicas es que no es necesario contar con el modelo matemático del sistema, simplemente basta con una serie de tiempo para poder

REFERENCIAS

1. Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. & Zhong, G. Q. "A universal circuit for studying and generating chaos", parts I & II. *IEEE Trans. Circ. Syst. -I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 10, October 1993.
2. Kennedy, M. P. "Synthesis of continuous three-segment voltage-controlled piecewise-linear resistors for Chua's circuit family using operational amplifiers, diodes and linear resistors". *Int. Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 21, pp. 551-558 (1993).

3. Kennedy, M. P. "Robust Op-amp realization of Chua's Circuit". *Frequenz*, Vol. 46, No. 3-4, March-April 1992.
4. Kennedy, M. P. "Three steps to chaos", parts I & II. *IEEE Trans. Circ. Syst. -I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 10, October 1993.
5. Abarbanel, H. D. I. "Analysis of observed chaotic data". New York, Springer-Verlag, 1996.
6. Abarbanel, H. D. I. & Brown, R. "The analysis of observed chaotic data". *Reviews of Modern Phys.* Vol. 65, No. 4, October 1993.