



COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN REDES NEURONALES ARTIFICIALES

Hugo G. González-Hernández, Marcos Montiel-Castellanos y Alejandro Corona-Jouanen
Laboratorio del Centro de Investigación, Universidad La Salle

RESUMEN

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) presentan comportamientos dinámicos complejos y, bajo ciertas circunstancias, presentan caos. En estos sistemas pueden presentarse toda clase de atractores: puntos de equilibrio, ciclos límite, atractores casi-periódicos y caos. Se han realizado muchos trabajos en lo que respecta a redes neuronales con retraso. Se ha demostrado que las redes neuronales con conexiones asimétricas y alta ganancia presentan también comportamiento caótico. En el presente trabajo se muestra un análisis de este tipo de RNA. Se muestra una RNA de cuatro neuronas y se analizan las condiciones bajo las cuales presenta comportamiento caótico calculando los exponentes de Lyapunov.

ABSTRACT

Artificial Neural Networks (ANN) present complex dynamics and, under certain circumstances, they present chaos. All kinds of attractors can be present in this systems, like equilibrium points, limit cycles, quasiperiodic and chaotic attractors. A lot of work has been done on neural networks with delay. It has been proved that Neural networks with assymetric connections and high gain also present chaotic behavior. The current paper analyzes the behavior of this type of ANN. A four-neuron ANN and the circumstances on which this system has chaotic behavior by computing the Lyapunov exponents is shown.

INTRODUCCIÓN

Antes de entrar en materia, revisaremos algunos resultados de Dinámica de Sistemas, Teoría de Bifurcaciones y Caos y Redes Neuronales Artificiales.

Sistemas Dinámicos

El *estado* de un sistema es el conjunto más pequeño de variables que determinan el comportamiento del sistema para todo tiempo.

El *espacio de estado* es un espacio n -dimensional cuyos ejes coordenados son los estados de un sistema.

El *atractor* es el lugar geométrico descrito por la evolución en tiempo de un sistema en el espacio de estado en estado estable. Podemos clasificar el tipo de atractor por la geometría de éste distinguiendo el de Punto Fijo, el de Ciclo

Límite, el Casi-Periódico (Quasiperiódico) y por último, el Caótico.

Caos

Definición 1. Dado un mapeo $\dot{x} = f(x)$, la evolución del sistema es *caótica* en un intervalo I si (3):

- (i) Los puntos de f forman un *conjunto denso* en I .
- (ii) f es *transitivo*.
- (iii) f es *sensible a condiciones iniciales*.

De las características del comportamiento caótico podemos resaltar la dimensión fractal del atractor, el mapa de Poincaré fractal, señal rica en frecuencias y exponente de Lyapunov positivo, siendo esta última una de las únicas medidas analíticas con las que se cuenta.

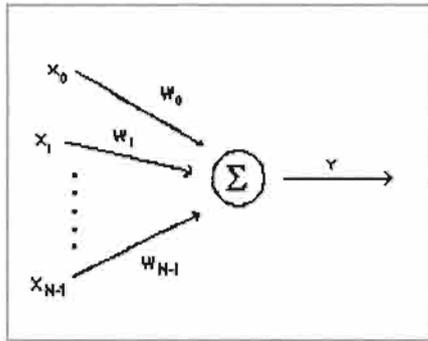


Figura 1. Función de un nodo de una RNA.

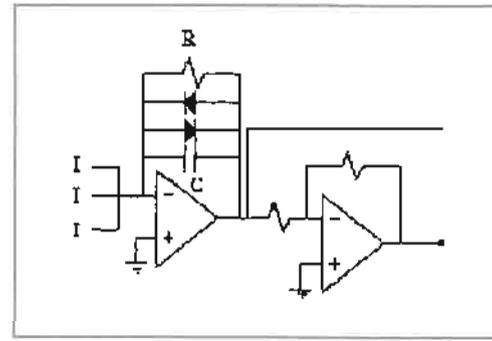


Figura 2. Diagrama del Circuito del Nodo i.

Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Las RNA son sistemas dinámicos no Lineales, que pueden ser descritos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), Ecuaciones en Diferencias (EeD) o Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) (8). Un nodo de una Red Neuronal puede esquematizarse como en la Figura 1.

Los tipos de conexiones interneuronales (2) son: Acoplamiento Positivo, Acoplamiento Negativo, Desacoplado.

El *Aprendizaje* es la adaptación de los valores de los pesos de conexión para un fin específico.

DESCRIPCIÓN DE LA RED

La red que se propone permite los tres tipos de acoplamiento entre sus nodos. Implantaremos el modelo de esta red en un circuito electrónico. El circuito consiste en 4 amplificadores no lineales conectados entre sí, el esquemático de uno de los nodos se puede ver en la Figura 2, los elementos pasivos son la resistencia y capacitancia de retroalimentación. La parte no lineal del circuito está compuesta por diodos.

Modelo matemático

Se puede modelar el circuito considerando que cada amp-op tiene una corriente de entrada y un voltaje de offset de cero.

Las relaciones de voltaje en el circuito son:

$$-C\dot{V} = JV + F(V_i)$$

donde:

$$F(V) = a\text{Senh}(bV_i)$$

- C es la Capacitancia de Retroalimentación.
- J es la matriz de Pesos entre los Nodos i y j .

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{R} & i = j \\ \pm\sigma & i \neq j \end{cases}$$

- El vector $V = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]^T$ con V_i como el voltaje de salida en el nodo i .
- a es una constante igual a $1.1125 \cdot 10^{-7}$ A.
- b es una constante determinada por la siguiente relación.

$$b = \frac{12}{n} V^{-1}$$

Simulación

El sistema de ecuaciones que describen la dinámica de la red fue simulado para diferentes



valores de pesos de la matriz J . Se encontraron atractores de *punto fijo*, de *ciclo llmite*, *cuasiperiódicos* y *caóticos*. Se tomaron como constantes los valores de a y b , y fijas las condiciones iniciales $V_1(0) = -1.5$, $V_2(0) = V_3(0) = V_4(0) = 0$.

Punto fijo

Los valores de J utilizados fueron:

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.28 & 0 & 0.56 \\ 0.6 & 0.333 & 0 & -0.93 \\ -0.22 & 0 & 0.333 & -0.5 \\ 0.47 & 0 & 0.22 & 0.333 \end{bmatrix}$$

La Figura 3 y la Figura 4 muestran el comportamiento dinámico del sistema, se puede observar que el atractor es un punto fijo.

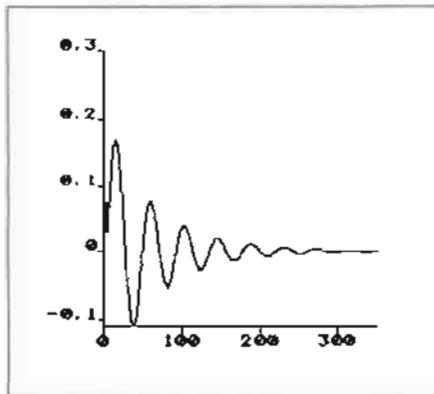


Figura 3. Evolución de $V_2(t)$.

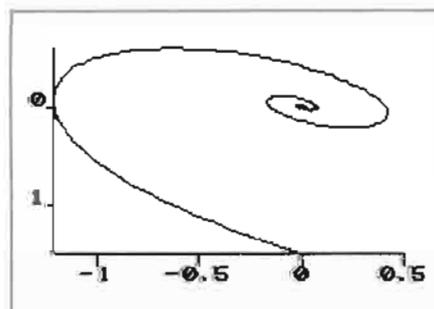


Figura 4. Proyección $V_1(V_2)$.

Ciclo Llmite

Para la matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.28 & -0.42 & -0.56 \\ -0.76 & 0.333 & -0.2 & -0.93 \\ -0.22 & 0 & -0.2 & 0.333 & -0.5 \\ -0.47 & -0.02 & -0.22 & 0.333 \end{bmatrix}$$

se obtuvo una órbita periódica como atractor, en la Figura 5 se muestra la forma de onda en tiempo.

La Figura 6 muestra el atractor en una proyección del espacio de estado en el plano V_2 vs. V_3 (con transitorios).

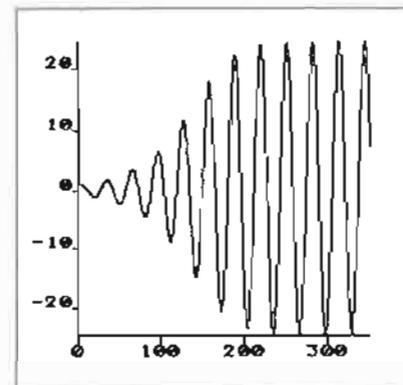


Figura 5. Evolución de $V_2(t)$.

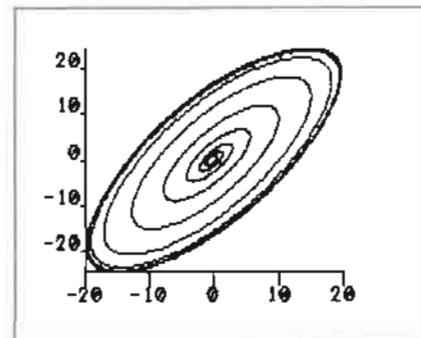


Figura 6. Proyección $V_2(V_3)$.



Atractor Quasiperiódico

Se encontró la siguiente matriz para este tipo de atractor.

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.35 & -0.2 & 0.51 \\ 0.76 & 0.333 & 0 & -0.72 \\ 0.83 & -0.2 & 0.333 & -0.45 \\ -0.39 & 0 & 0.15 & 0.333 \end{bmatrix}$$

La señal en tiempo se muestra en la Figura 7. Observamos que esta señal está compuesta por varias frecuencias, obteniéndose así un atractor quasiperiódico, mismo que se muestra en la Figura 8. Cabe aclarar que, aunque el sistema muestre varias frecuencias, el atractor sigue siendo un ciclo límite, independientemente que se le conozca como atractor quasiperiódico.

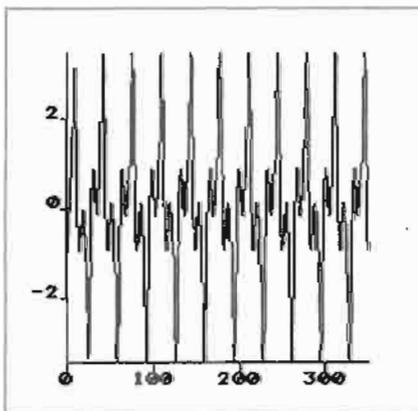


Figura 7. Evolución de $V_1(t)$.

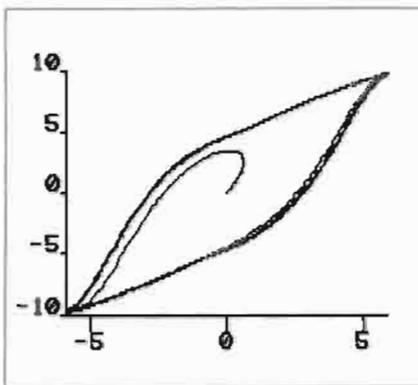


Figura 8. Proyección $V_2(V_3)$.

Caos

En este trabajo reportamos dos casos en los que se presenta comportamiento caótico, aunque pueden existir más.

A) Primer caso:

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.2 & -0.42 & 0.54 \\ -0.76 & 0.333 & 0 & 0.78 \\ 0.83 & -0.2 & 0.333 & 0.45 \\ -0.05 & 0 & 0.17 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Los exponentes de Lyapunov del sistema son $\lambda_1 = 0.03052$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.158$, $\lambda_4 = -0.60238$ y la dimensión de Lyapunov es $D_L = 2.19315$

Observamos claramente que la dimensión del sistema es fractal y que los exponentes de Lyapunov son de la forma (+, 0, -) que es una condición suficiente para que exista caos.

En la Figura 9 podemos observar el comportamiento en tiempo para esta matriz de pesos. En la Figura 10 se muestra una proyección del atractor que es de tipo Rössler.

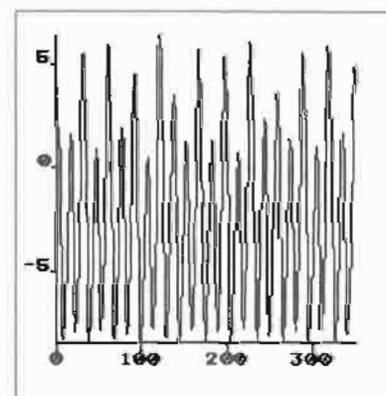


Figura 9. Evolución de $V_2(t)$.

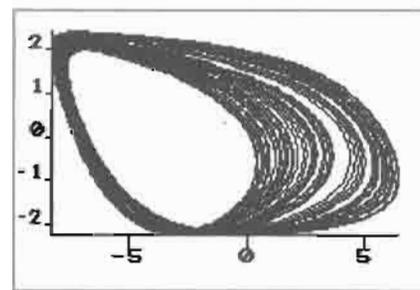


Figura 10. Proyección $V_1(V_2)$.

B) Segundo caso:

$$J = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.2 & -0.42 & 0.54 \\ -0.76 & 0.333 & -0.01 & 0.78 \\ 0.83 & -0.15 & 0.333 & 0.45 \\ -0.07 & 0 & 0.17 & 0.333 \end{bmatrix}$$

obteniendo los siguientes exponentes de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0624 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -0.1427 \\ \lambda_4 &= -0.5955 \\ D_L &= 2.4373 \end{aligned}$$

En la Figura 11 se observa la respuesta en tiempo de variable $V_1(t)$.

Como se había mencionado al principio del presente trabajo, una de las propiedades

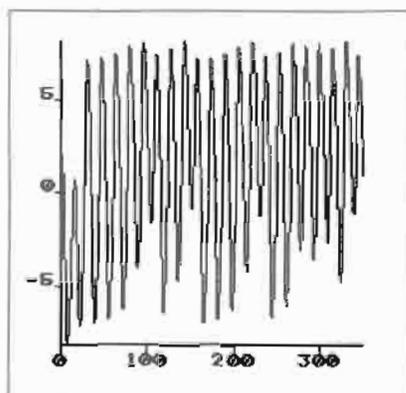


Figura 11. Evolución de $V_1(t)$.

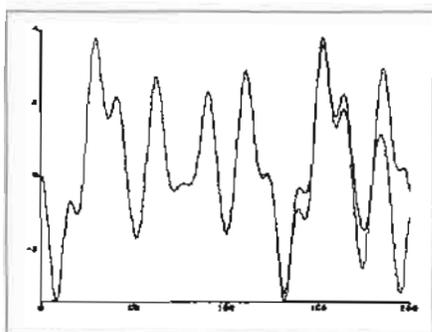


Figura 12. Sensibilidad a condiciones iniciales.

fundamentales del comportamiento caótico es su sensibilidad a condiciones iniciales, en la Figura 12 presentamos dos diferentes evoluciones en tiempo de la variable $V_1(t)$ para dos condiciones iniciales arbitrariamente cercanas. Podemos observar que las soluciones divergen mientras el tiempo aumenta.

Finalmente se puede observar en la Figura 13 una proyección del atractor en el plano V_1 vs. V_2 .

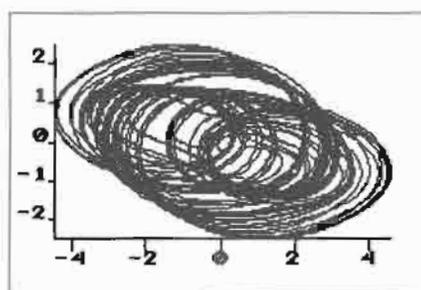


Figura 13. Proyección $V_1(V_2)$.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El estudio de redes neuronales involucra conceptos de dinámica no lineal, sistemas estocásticos (9) y algunos otros. Es importante conocer el comportamiento presente en una RNA, sus causas y las aplicaciones que éste pueda tener. Los resultados pueden ayudar a resolver aspectos fundamentales concernientes al comportamiento caótico dentro de las RNA de mayor orden (2,4,6).

La simulación computacional al igual que la implementación electrónica son de gran ayuda para el estudio del comportamiento de las RNA (5). En este trabajo encontramos algunas de las configuraciones paramétricas en las que se presentan estos tipos de atractores. Se está trabajando para encontrar las condiciones paramétricas bajo las cuales un sistema como este presenta caos (8,10). Es importante señalar que es necesario realizar un análisis de estabilidad para este tipo de sistemas (7).



REFERENCIAS

1. Baker, G. L.; Gollub, J. P. *Chaotic Dynamics: An Introduction*. Cambridge Press, Cambridge 1992.
2. Chapeau-Blondeau F. & Chauvet G. Stable, Oscillatory, and Chaotic Regimes in the Dynamics of Small Neural Networks with Delay. *Neural Networks* 5, 1992.
3. Gebroggi, C.; Ott, E. and Yorke, J. A. Controlling Chaos. *Physical Review Letters*. 64, 1990.
4. Hansel, D. & Sompolinsky, H. Synchronization and Computation in a Chaotic Neural Network. *Physical Review Letters* 68, 1992.
5. Kepler, T. B.; Datt, S. & Meyer R. and Abbott L. Chaos in a Neural Network Circuit. *Physica D* 46, 1990.
6. Lippmann, R. P. An Introduction to Computing with Neural Nets. *IEEE ASSP Magazine*, Abril 1987.
7. Matsuoka, K. Stability Conditions for Nonlinear Continuous Neural Networks With Asymmetric Connection Weights. *Neural Networks* 5, 1992.
8. González-Hernández, H. G. *Estudio del Comportamiento Caótico en Redes Neuronales Artificiales Simples*. XXXVI Congreso Nacional de Física. Octubre 1993, Acapulco, Gro.
9. Shinamoto, S. Statistical Properties of Neural Networks. *Progress of Theoretical Physics*. 75, 1986.
10. Van der Maas H.; Verschure P. & Molenaar P. A note on Chaotic Behavior in Simple Neural Networks. *Neural Networks* 3, 1990.